

# ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ВМАР|M| $\infty$

С. П. Моисеева, С. В. Пауль

---

Томский государственный университет

Томск, Россия

E-mail: smoiseeva@mail.ru, paulsv82@mail.ru

Исследуется система массового обслуживания с групповым входящим потоком и неограниченным числом приборов. Методом асимптотического анализа найдено распределение вероятностей числа занятых приборов в системе.

*Ключевые слова:* система массового обслуживания, ВМАР-поток, метод асимптотического анализа.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов [1] являются моделями реальных систем в различных сферах жизнедеятельности человека: банковское дело, страхование, торговля, транспорт и т.д.

В случае простейшего входящего потока для таких систем удастся найти аналитическое решение для стационарного распределения вероятностей числа занятых приборов в системе, а также для числа заявок, окончивших обслуживание на некотором промежутке времени [2]. Но в случае других моделей входящего потока общих подходов к исследованию нет. Для их исследования применяют численные методы, имитационное моделирование и асимптотический метод [3].

Рассмотрим бесконечнолинейную систему массового обслуживания, на вход которой поступает ВМАР-поток. Продолжительности обслуживания заявок стохастически независимы, одинаково распределены и имеют экспоненциальную функцию распределения с параметром  $\mu$ . Поступившая заявка занимает любой из свободных приборов. Завершив обслуживание, заявка покидает систему.

В случае экспоненциального времени обслуживания задача исследования немарковского процесса (при непуассоновском входящем потоке), определяющего число обслуживаемых заявок (число занятых приборов), решается введением дополнительных переменных таким образом, чтобы случайный процесс в расширенном фазовом пространстве становился марковским, что в некоторых работах называют «внешним» марковизированием.

Пусть  $i(t)$  – число заявок в системе, то есть число приборов, занятых в момент времени  $t$ . Так как  $i(t)$  – немарковский процесс, то будем рассматривать двумерный случайный процесс  $\{i(t), k(t)\}$ , где  $k(t)$  – состояния управляющей ВМАР-поток цепи Маркова  $k(t)$  в момент времени  $t$ .

Обозначим  $P\{k(t) = k, i(t) = i\} = P(k, i, t)$ . С учетом этого запишем систему уравнений Колмогорова для распределения вероятностей  $P(k, i, t)$ :

$$\frac{\partial P(k, i, t)}{\partial t} = P(k, i, t)(-\lambda_k + q_{kk} - i\mu) + \sum_{l=1}^i P(k, i-l, t)\lambda_k d_{kk}(l) +$$

$$+ (i+1)\mu P(k, i+1, t) + \sum_{v \neq k} \sum_{l=1}^i P(v, i-l, t) q_{vk} d_{vk}(l). \quad (1)$$

Для стационарного распределения  $\Pi(k, i) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(k, i, t)$  систему (1) запишем в виде

$$0 = \Pi(k, i) (-\lambda_k + q_{kk} - i\mu) + \sum_{l=1}^i \Pi(k, i-l) \lambda_k d_{kk}(l) + \\ + (i+1)\mu \Pi(k, i+1) + \sum_{v \neq k} \sum_{l=1}^i \Pi(v, i-l) q_{vk} d_{vk}(l). \quad (2)$$

Рассмотрим частичные характеристические функции следующего вида

$$H(k, u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju i} \Pi(k, i).$$

Тогда система уравнений для частичных характеристических функций примет вид:

$$j\mu(e^{-ju} - 1) \frac{\partial H(k, u)}{\partial u} = H(k, u) \left\{ (-\lambda_k + q_{kk}) + \sum_{l=1}^{\infty} e^{jul} \lambda_k d_{kk}(l) \right\} + \\ + \sum_{v \neq k} H(v, u) \sum_{l=1}^{\infty} e^{jul} q_{vk} d_{vk}(l). \quad (3)$$

Введем следующие обозначения:  $\mathbf{H}(u, t) = [H(1, u), H(2, u), \dots, H(K, u)]$  – вектор-строка;

$$\mathbf{D}(0) = \begin{bmatrix} -(\lambda_1 - q_{11}) & q_{12}d_{12}(0) & \cdots & q_{1K}d_{1K}(0) \\ q_{21}d_{21}(0) & -(\lambda_2 - q_{22}) & \cdots & q_{2K}d_{2K}(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{K1}d_{K1}(0) & q_{K2}d_{K2}(0) & \cdots & -(\lambda_K - q_{KK}) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}(l) = \begin{bmatrix} \lambda_1 d_{11}(l) & q_{12}d_{12}(l) & \cdots & q_{1K}d_{1K}(l) \\ q_{21}d_{21}(l) & \lambda_2 d_{22}(l) & \cdots & q_{2K}d_{2K}(l) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{K1}d_{K1}(l) & q_{K2}d_{K2}(l) & \cdots & \lambda_K d_{KK}(l) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}(u) = \sum_{l=0}^{\infty} e^{jul} \mathbf{D}(l).$$

Тогда система дифференциальных уравнений (3) примет векторно-матричный вид

$$j\mu(e^{-ju} - 1) \frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u} = \mathbf{H}(u) \mathbf{Q}(u). \quad (4)$$

## МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Для исследования системы ВМАР|M| $\infty$  воспользуемся её основным уравнением (4), которое будем решать в асимптотическом условии растущего времени обслуживания, то есть при  $\mu \rightarrow 0$ . Обозначим  $\mu = \varepsilon$  и в уравнении (4) выполним замены

$$u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}(u) = \mathbf{F}_1(w, \varepsilon), \quad (5)$$

для вектора  $\mathbf{F}_1(w, \varepsilon)$  получим уравнение

$$j(e^{-j\varepsilon w} - 1) \frac{\partial \mathbf{F}_1(w, \varepsilon)}{\partial w} = \mathbf{F}_1(w, \varepsilon) \mathbf{Q}(w, \varepsilon). \quad (6)$$

Докажем следующее утверждение.

**Теорема 1.** Предельное при  $\varepsilon \rightarrow 0$  значение  $F_1(w)$  решения  $F_1(w, \varepsilon)$  уравнения (6) имеет вид

$$\mathbf{F}_1(w) = \mathbf{R} e^{jw\lambda}, \quad (7)$$

где вектор  $\mathbf{R}$  – вектор стационарного распределения управляющей потоком цепи, а параметр  $\lambda$  определяется равенством

$$\lambda = \mathbf{R} \mathbf{D}_1 \mathbf{E}. \quad (8)$$

**Доказательство.**

В уравнении (6) выполним предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим, что  $F_1(w)$  является решением однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{F}_1(w) \mathbf{Q} = 0,$$

поэтому  $\mathbf{F}_1(w)$  имеет вид

$$\mathbf{F}_1(w) = \mathbf{R} \Phi_1(w). \quad (9)$$

Здесь  $\mathbf{R}$  – вектор стационарного распределения вероятностей значений цепи Маркова  $k(t)$ , определяемый системой уравнений  $\mathbf{R} \mathbf{Q} = 0$  и условием нормировки  $\mathbf{R} \mathbf{E} = 1$ .

Скалярную функцию  $\Phi_1(x)$  определим следующим образом. Просуммируем все уравнения системы (6), поделив левую и правую части полученного равенства на  $\varepsilon$  и, полагая  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим, что  $F_1(w)$  является решением уравнения

$$w \frac{\partial \mathbf{F}_1(w)}{\partial w} \mathbf{E} = \mathbf{F}_1(w) jw \mathbf{D}_1 \mathbf{E},$$

подставив в которое (9), принимая во внимание равенство  $\mathbf{R} \mathbf{E} = 1$ , получим для скалярной функции  $\Phi_1(w)$  уравнение

$$\frac{\partial \Phi_1(w)}{\partial w} = j \Phi_1(w) \mathbf{R} \mathbf{D}_1 \mathbf{E}.$$

Используя обозначение (8), решение  $\Phi_1(w)$  этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию  $\Phi_1(0) = 1$ , запишем в виде

$$\Phi_1(w) = e^{jw\lambda}.$$

Подставляя это выражение для  $\Phi_1(w)$  в (9), получим, что  $\mathbf{F}_1(w)$  определяется равенством (7). Теорема доказана.

В силу замены (5) и равенства (9), можно записать приближённое (асимптотическое) равенство

$$\mathbf{H}(u) = \mathbf{F}_1(w, \varepsilon) \approx \mathbf{F}_1(w) = \mathbf{R} e^{jw\lambda},$$

поэтому для характеристической функции стационарного процесса  $i(t)$  запишем

$$M e^{ju i(t)} = \mathbf{H}(u) \mathbf{E} \approx e^{jw\lambda} = \exp\{ju \lambda / \mu\}. \quad (10)$$

Полученное равенство будем называть асимптотикой первого порядка для системы обслуживания ВМАР|M| $\infty$ , которая определяет значение  $\lambda/\mu$  асимптотического среднего значения числа занятых приборов.

Для нахождения аппроксимации допредельного распределения  $\Pi(i)$  рассмотрим асимптотику второго порядка.

В уравнении (4) выполним замену

$$\mathbf{H}(u) = \mathbf{H}_2(u) \exp\{ju \lambda / \mu\}, \quad (11)$$

получим уравнение для  $\mathbf{H}_2(u)$

$$j\mu(e^{-j\mu} - 1) \frac{\partial \mathbf{H}_2(u)}{\partial u} = \mathbf{H}_2(u) \{ \mathbf{Q}(u) + \lambda(e^{-j\mu} - 1) \mathbf{I} \}, \quad (12)$$

здесь  $\mathbf{I}$  – единичная диагональная матрица.

Обозначив  $\mu = \varepsilon^2$ , в уравнении (12) выполним замены

$$u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}_2(u) = \mathbf{F}_2(w, \varepsilon), \quad (13)$$

получим

$$j\varepsilon(e^{-j\varepsilon w} - 1) \frac{\partial \mathbf{F}_2(w, \varepsilon)}{\partial w} = \mathbf{F}_2(w, \varepsilon) \{ \mathbf{Q}(w, \varepsilon) + \lambda(e^{-j\varepsilon w} - 1) \mathbf{I} \}. \quad (14)$$

Докажем следующее утверждение.

**Теорема 2.** Предельное при  $\varepsilon \rightarrow 0$  значение  $F_2(w)$  решения  $F_2(w, \varepsilon)$  уравнения (14) определяется равенством

$$\mathbf{F}_2(w) = \mathbf{R} \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \kappa_2 \right\}, \quad (15)$$

где величина  $\kappa_2$  определяется равенством

$$\kappa_2 = \frac{\mathbf{R} \mathbf{D}_2 \mathbf{E} + \lambda}{2} + \mathbf{f}_2 \mathbf{D}_1 \mathbf{E}, \quad (16)$$

здесь вектор  $\mathbf{f}_2$  удовлетворяет условию  $\mathbf{f}_2 \mathbf{E} = 0$  и является решением неоднородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{f}_2 \mathbf{Q} + \mathbf{R}(\mathbf{D}_1 - \lambda \mathbf{I}) = 0. \quad (17)$$

**Доказательство.** В уравнении (14) выполним предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим уравнение

$$\mathbf{F}_2(w) \mathbf{Q} = 0,$$

решение которого запишем в виде

$$\mathbf{F}_2(w) = \mathbf{R} \Phi_2(w), \quad (18)$$

где скалярная функция  $\Phi_2(w)$  будет определена ниже.

Решение  $\mathbf{F}_2(w, \varepsilon)$  уравнения (14) запишем в виде разложения

$$\mathbf{F}_2(w, \varepsilon) = \Phi_2(w) (\mathbf{R} + j\varepsilon w \mathbf{f}_2) + O(\varepsilon^2), \quad (19)$$

в котором положим выполнение дополнительного условия и, подставив которое в (14), получим, что вектор  $\mathbf{f}_2$  является решением неоднородной системы линейных алгебраических уравнений, совпадающей с (17).

Для нахождения скалярной функции  $\Phi_2(w)$  просуммируем все уравнения системы (14), получим равенство, раскладывая в ряд экспоненты в котором, имеем следующее соотношение

$$j\varepsilon(-j\varepsilon w) \frac{\partial \mathbf{F}_2(w, \varepsilon)}{\partial w} \mathbf{E} = \mathbf{F}_2(w, \varepsilon) \left\{ \mathbf{Q} + j\varepsilon w (\mathbf{D}_1 - \lambda \mathbf{I}) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} (\mathbf{D}_2 + \lambda \mathbf{I}) \right\} \mathbf{E} + O(\varepsilon^3),$$

подставив в которое разложение (19) и в силу (8) последнее равенство примет вид

$$\frac{\partial \Phi_2(w)}{\partial w} = j^2 w \Phi_2(w) \left( \frac{\mathbf{R} \mathbf{D}_2 \mathbf{E} + \lambda}{2} + \mathbf{f}_2 \mathbf{D}_1 \mathbf{E} \right).$$

Решение  $\Phi_2(w)$  этого уравнения, удовлетворяющее условию  $\Phi_2(0) = 1$ , в силу обозначения (16), можно записать в виде выражения

$$\Phi_2(w) = \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \kappa_2 \right\},$$

подставляя которое в (18), получим равенство (15). Теорема доказана.

В силу замены (13) и равенства (11) для  $\mathbf{H}_2(u)$  можно записать асимптотическое равенство

$$\mathbf{H}_2(u) = \mathbf{F}_2(w, \varepsilon) \approx \mathbf{F}_2(w) = \mathbf{R} \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \kappa_2 \right\} = \mathbf{R} \exp \left\{ \frac{(ju)^2}{2} \frac{\kappa_2}{\mu} \right\}. \quad (20)$$

Тогда

$$\mathbf{H}(u) = \mathbf{H}_2(u) \exp \left\{ ju \frac{\lambda}{\mu} \right\} \approx \mathbf{R} \exp \left\{ ju \frac{\lambda}{\mu} + \frac{(ju)^2}{2} \frac{\kappa_2}{\mu} \right\},$$

поэтому для характеристической функции величины  $i(t)$  получим

$$h_2(u) = M e^{ju i(t)} = \mathbf{H}(u) \mathbf{E} \approx \exp \left\{ ju \frac{\lambda}{\mu} + \frac{(ju)^2}{2} \frac{\kappa_2}{\mu} \right\}. \quad (21)$$

Это равенство будем называть асимптотикой второго порядка.

Из (21) следует, что стационарное распределение вероятностей  $\Pi(i)$  числа приборов, занятых в системе обслуживания ВМАР|M| $\infty$ , можно аппроксимировать гауссовским распределением с параметрами

$$a = M i(t) = \lambda / \mu, \quad \sigma^2 = M \{ (i(t) - a)^2 \} = \kappa_2 / \mu,$$

где величина  $\lambda$  определяется равенством (8), а величина  $\kappa_2$  определяется равенством (16).

## ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Для определения области применимости сравним характеристики, полученные с помощью метода асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания, и характеристики, полученные с помощью метода начальных моментов, полученные ранее.

Используя следующие значения параметров ВМАР-потока:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & -0,5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}(1) = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}(2) = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,8 & 0,6 \\ 0,8 & 0,5 & 0,6 \\ 0,8 & 0,6 & 0,5 \end{bmatrix},$$

для различных значений  $\mu = \varepsilon$  получим следующие характеристики.

Таблица 1

Область применимости асимптотических характеристик в допредельной ситуации

$\varepsilon$	0,1	0,05	0,01	0,001
Допредельные значения дисперсии	676,62	1420,86	7410,35	74842,49
Асимптотические значения дисперсии	749,26	1438,52	7492,58	74925,83
Относительная погрешность	0,107	0,05	0,011	0,001

Из результатов, приведенных в Таблице 1, можно сделать вывод о том, что при уменьшении параметра  $\varepsilon$  асимптотические результаты приближаются к допредельным. Значение относительной погрешности при  $\mu = 0,05$  составляет 5%, что является приемлемым для практических расчетов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко, Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. Изд. 3-е, испр. и доп. М. : КомКнига, 2007. 400 с.
2. Mirasol, N. M. The output of an  $M|G|\infty$  queueing system is Poisson / N. M. Mirasol // Operations Research. 1963. № 11. P. 282–284.
3. Назаров, А. А. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А. А. Назаров, С. П. Моисеева. Томск : изд-во НТЛ, 2006. 112 с.